フェルマー最終定理$(\boldsymbol{p}=\boldsymbol{4})$の証明

東森秀朋　2024.02.14

要約

フェルマーの等式は，算術演算において成立するならば，剰余演算において必ず成立する．しかし，そのフェルマーの等式は，剰余演算において成立しても，算術演算において必ずしも成立しない．ただ，そのフェルマーの等式は，剰余演算において成立しないならば，算術演算において決して成立しない．

そこで，指数が数4のフェルマーの等式は素数5による剰余演算において成立しないことを証明することにより，そのフェルマーの等式は算術演算において成立しないことを証明する．

結果として，フェルマーの最終定理$(p=4)$が証明される．

1．始めに

指数が4のフェルマーの等式は次のとおりである．

$$A^4+B^4=C^4 \tag{1.1}$$

自然数A，B及びCは互いに素である．

$\left(\frac{Q}{R}\right)$は自然数Qを自然数Rで剰余演算したときの剰余である．

中央の表記が正しいが，右辺のように表記する．

自然数R　自然数S

$$\left(\frac{QS}{RT}\right)=\left(\frac{\left(\frac{Q}{RT}\right)\left(\frac{S}{RT}\right)}{RT}\right)=\left(\frac{Q}{RT}\right)\left(\frac{S}{RT}\right) \qquad \left(\frac{Q\pm S}{RT}\right)=\left(\frac{\left(\frac{Q}{RT}\right)\pm\left(\frac{S}{RT}\right)}{RT}\right)=\left(\frac{Q}{RT}\right)\pm\left(\frac{S}{RT}\right)$$

２．指数が数4のフェルマーの等式は素数5による剰余演算において成立しない.

2.1　フェルマーの等式の自然数A及びBのいずれかは素数5を含む

自然数A，B及びCのいずれも素数5を含まないとき，フェルマーの等式は素数5による剰余演算において成立しない．

$$\left(\frac{A^4+B^4}{5}\right)=\left(\frac{A^4}{5}\right)+\left(\frac{B^4}{5}\right)=1+1=2 \qquad \left(\frac{C^4}{5}\right)=1 \qquad \left(\frac{A^4+B^4}{5}\right)\neq\left(\frac{C^4}{5}\right)$$

自然数Cが素数5を含むとき，フェルマーの等式は素数5による剰余演算において成立しない．

$$\left(\frac{A^4+B^4}{5}\right)=\left(\frac{A^4}{5}\right)+\left(\frac{B^4}{5}\right)=1+1=2 \qquad \left(\frac{C^4}{5}\right)=0 \qquad \left(\frac{A^4+B^4}{5}\right)\neq\left(\frac{C^4}{5}\right)$$

したがって，自然数A又はBのいずれかは素数5を含む．

そこで以下では，自然数Aが素数5を含むとする．

2.2　フェルマーの等式は因数分解される

次の等式(2.2.1)及び(2.2.2)を成立させる自然数U及びVは必ず存在する．

自然数U，V，A及びBは互いに素である．

$$C^2-B^2=U \qquad (2.2.1)$$

$$C^2+B^2=V \qquad (2.2.2)$$

次の等式(3.2.3)及び(3.2.4)が成立する．

$$(C^2-B^2)(C^2+B^2)=(C^4-B^4)=A^4=UV \qquad (2.2.3)$$

そうすると，自然数U及びVは互いに素であるから次の等式が成立する．

自然数X及びYは互いに素である

$$U=X^4 \qquad V=Y^4 \qquad XY=A$$

そうすると，次の等式が成立する．

$$C^2-B^2=U=X^4 \qquad (2.2.4)$$

$$C^2+B^2=V=Y^4 \qquad (2.2.5)$$

自然数Aが素数5を含むから，自然数X又はYのいずれかは素数5を含む．

しかしながら，自然数X又はYのいずれが素数5を含んでも，上記等式(2.2.4)又は(2.2.5)のいずれかは素数5による剰余演算において成立しない．

自然数Xが素数5を含むとき，等式(2.2.5)は素数5による剰余演算において成立しない．

$$\left(\frac{C^2+B^4}{5}\right)=2\left(\frac{C^2}{5}\right)=\pm2 \qquad \left(\frac{Y^4}{5}\right)=1 \qquad \left(\frac{C^2+B^2}{5}\right)\neq\left(\frac{Y^4}{5}\right)$$

自然数Yが素数5を含むとき，等式(2.2.4)は素数5による剰余演算において成立しない．

$$\left(\frac{C^2-B^2}{5}\right)=2\left(\frac{C^2}{5}\right)=\pm2 \qquad \left(\frac{Y^4}{5}\right)=1 \qquad \left(\frac{C^2+B^2}{5}\right)\neq\left(\frac{Y^4}{5}\right)$$

以上のとおり，指数が数4のフェルマーの等式は素数5による剰余演算において成立しない．

３．　結論

指数が数4のフェルマーの等式は素数5による剰余演算において成立しないから，そのフェルマーの等式は算術演算において決して成立しない．

それ故，指数が数4のフェルマーの等式を成立させる自然数A，B及びCは存在

しない.

よって，フェルマーの最後定理 $(p = 4)$ は証明された.

４． 参考文献

[1] “Sophie Germain.” Encyclopaedia Britannica Online. Encyclopaedia Britannica Inc., 2013.
Web.
http://www.britannica.com/EBchecked/topic/230626/SophieGermain/2647/Additional-Reading.